

Espín

- Las partículas elementales tienen espín $\frac{1}{2}$, y en vez de usar $|j m\rangle$ se usa $|s m_s\rangle$ con $s = \frac{1}{2}$.
- Además, para la base

$$\beta = \{ |s = \frac{1}{2}, m_s = -\frac{1}{2}\rangle, |s = \frac{1}{2}, m_s = +\frac{1}{2}\rangle \}$$

Se suele usar la notación

$$\beta = \{ |\downarrow\rangle, |\uparrow\rangle \}$$

Para esta base $[J_z]_{\beta} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pero, si escogemos un orden distinto

$$\beta' = \{ |\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle \}$$

$$[J_z]_{\beta'} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

En los libros suele usarse β' más que β .

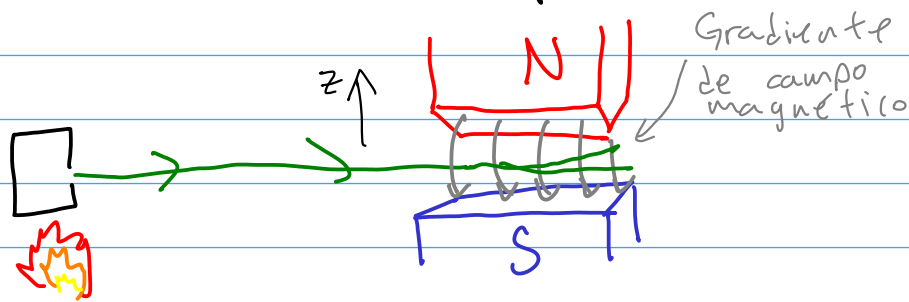
La clase pasada usamos β y encontramos

$$[J_x]_{\beta} = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los e-vectores de J_x son $\frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}}$ e-valor $\frac{\hbar}{2}$

$$\frac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad -\frac{\hbar}{2}$$

Experimento de Stern-Gerlach (cómo medir espín).



Si las partículas tienen momento magnético $\vec{\mu}$
su interacción con el campo magnético es
$$V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} \quad (\text{energía de interacción})$$

Hay una relación entre el momento
magnético $\vec{\mu}$ y el momento angular $\vec{S}$.



$\vec{\mu}$ es proporcional a $\vec{S}$

A la constante de proporcionalidad
se le llama razón giromagnética.

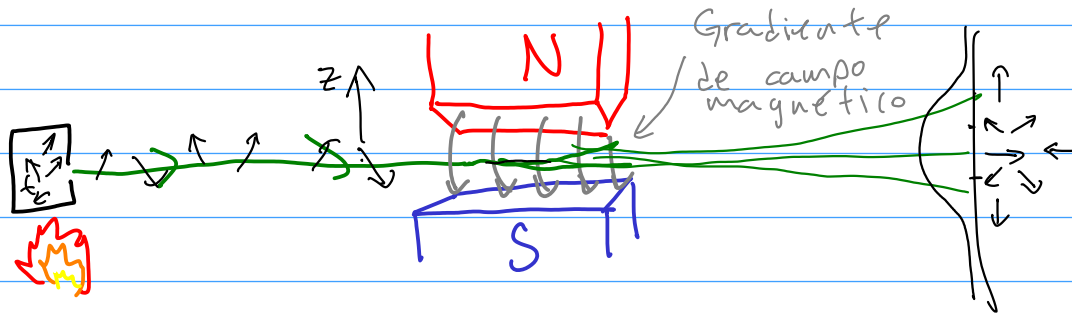
La fuerza que el campo magnético ejerce
sobre la partícula es

Si consideramos $\vec{B} = B(z) \hat{z} \Rightarrow V = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_z B(z)$

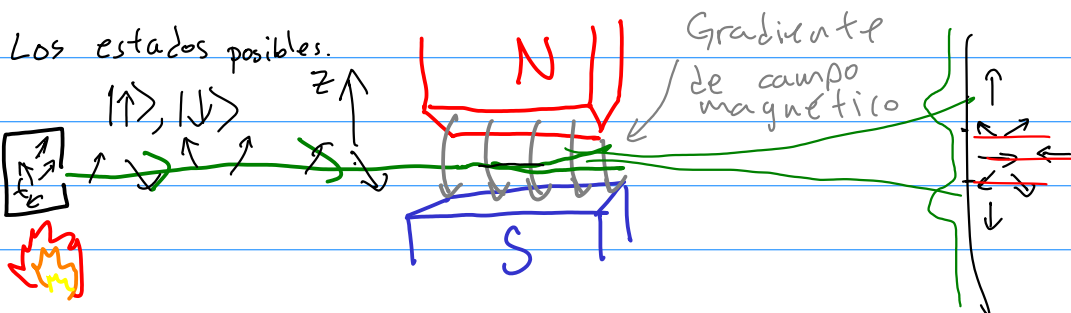
$$\vec{F} = -\frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} = \mu_z \frac{\partial B(z)}{\partial z} \hat{z}$$

Si $\frac{\partial B}{\partial z} > 0$, el signo de μ_z determina
la dirección de la fuerza.

Clásicamente, cualquier valor de μ_z es válido.



En la realidad, sólo hay 2 valores de μ_z que se obtienen.

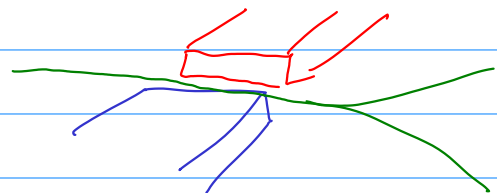


En el horno hay átomos de plata (Ag)
Al sumar todos los momentos angulares de los electrones, protones y neutrones que componen al átomo de Ag, obtenemos $j = \frac{1}{2}$.

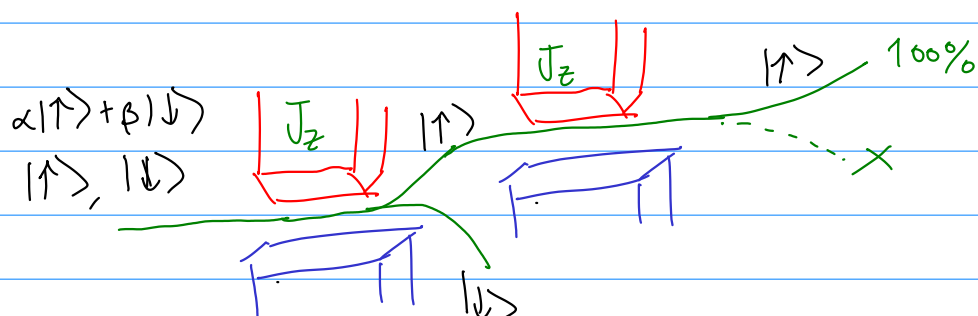
Podemos medir J_z



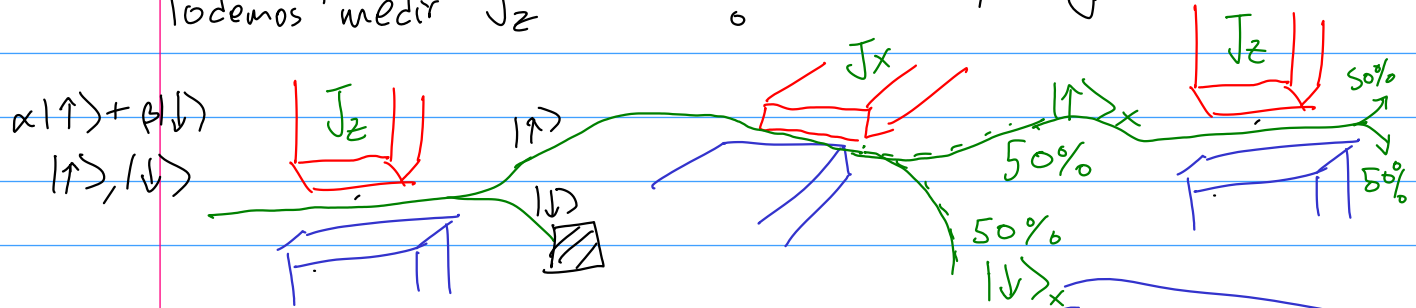
J_x



Podemos medir J_z y luego J_z de nuevo



¿Que pasa si medimos J_z y luego J_x ?
Podemos medir J_z



Los e-vectores de J_x son

$$\frac{|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} = |\uparrow\rangle_x$$

$$\frac{|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle}{\sqrt{2}} = |\downarrow\rangle_x$$

Así que $|\uparrow\rangle = \frac{|\uparrow\rangle_x + |\downarrow\rangle_x}{\sqrt{2}}$

Momento angular orbital

- Tiene análogo clásico $\vec{L} = \vec{R} \times \vec{p}$

→ Podemos encontrar una base de e-vectores de L^2 y L_z .

¿Cómo se ven estos e-vectores en la representación $\{|\vec{r}\rangle\}$?

→ Recordando que $\langle \vec{r} | \vec{R} | \psi \rangle = \vec{r} \psi(\vec{r})$

$$\langle \vec{r} | \vec{p} | \psi \rangle = -i\hbar \vec{\nabla} \psi(\vec{r})$$

$$\langle \vec{r} | \vec{L} | \psi \rangle = \langle \vec{r} | \vec{R} \times \vec{p} | \psi \rangle$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

$$\langle \vec{r} | L_x | \psi \rangle = \left[y \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \right) - z \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \psi(\vec{r})$$

$$\langle \vec{r} | L_x | \psi \rangle = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right) \psi(\vec{r})$$

Usando el abuso de notación del Griffiths.

$$L_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

implícitamente supone que estamos en la representación de posición.

$$L_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right)$$

$$L_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

$$L_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

En coordenadas esféricas

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

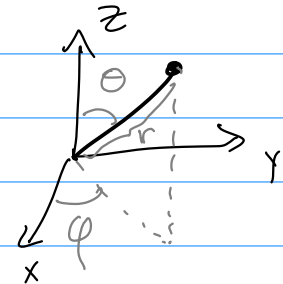
$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

$$L_x = i\hbar \left(\sin \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \varphi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$L_y = i\hbar \left(-\cos \varphi \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\sin \varphi}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right)$$

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$



Podemos obtener L_+ , L_- y L^2 .

$$L^2 = -\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right)$$

Buscamos e-vectores de L^2 y L_z .

Como estamos en la repr. $\{|\vec{r}\rangle\}$,
los e-vectores son en realidad e-funciones.

Las ecuaciones de e-valores que buscamos resolver son

$$\hat{L}^2 |\psi\rangle = \hbar^2 l(l+1) |\psi\rangle$$

$$\hat{L}_z |\psi\rangle = \hbar m |\psi\rangle$$

En la representación $\{|\vec{r}\rangle\}$

$$-\hbar^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\tan \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \psi(\vec{r}) = \hbar^2 l(l+1) \psi(\vec{r})$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi(\vec{r}) = \hbar m \psi(\vec{r})$$

→ Para $\psi(\vec{r}) = \psi(r, \theta, \varphi)$, r no aparece en los operadores, sólo importan θ y φ .

→ Usando separación de variables $\psi(r, \theta, \varphi) = f(r) Y_l^m(\theta, \varphi)$

→ Por teoría de momento angular $m = -l, \dots, l$

$$L^2 Y_l^m(\theta, \varphi) = \hbar^2 l(l+1) Y_l^m(\theta, \varphi)$$

$$L_z Y_l^m(\theta, \varphi) = \hbar m Y_l^m(\theta, \varphi)$$